**Álgebra Linear**

**Leis de uma Álgebra:**

Uma lei interna associa dois elementos  e  de um conjunto  à um terceiro elemento . Por exemplo:  onde a lei interna é a adição , ou , onde a lei interna é a multiplicação . Na nossa notação se afirma que  ou .

A lei será associativa se:  e será comutativa se .

O elemento será REGULAR se  e . O elemento será unitário sobre a lei  se .

O elemento  possui elemento inverso sobre a lei  se .

Teorema: se uma lei  possui elemento unitário, é associativa e  possui inversa, então a inversa é única e é regular.

Provar por absurdo: supor que inversos de .

Nesse caso:  e  além disso . Agora, como é associativo então  o que implica que  em contradição com . Logo a inversa é única.

Falta a regularidade: Seja  e . Queremos mostrar que se  então . Aplicando a inversa de  de ambos os lados temos que  e usando a associatividade  logo  e, finalmente  C.Q.D.

**Álgebra com duas Leis**. Vamos chamar a lei  de lei 1 e uma outra lei 2 de . A lei  será distributiva frente à lei  se  ou  para . Exemplo: mostrar que a multiplicação é distributiva frente à adição mas o inverso não é verdade.  logo a mulitplicação é distributiva. Entretanto .

GRUPO. Um conjunto G é um grupo se uma lei interna  com as seguintes propriedades:

1. é associativa
2.  admite elemento unitário 
3. admite inversa 

Se, além da propriedade associativa,  for comutativa, o grupo é chamado de Abeliano.

CAMPOS. Seja um grupo Abeliano de  com uma segunda lei  associativa e distributiva frente à . Seja  o elemento unitário de e  , onde  é o conjunto de todos os elementos de exceto . Se é uma lei de grupo para  então é um campo.

Exemplo: vamos considerar as leis  e  para o conjunto dos números reais.

Primeira lei :

 associativa

 comutativa

 então  é o elemento unitário da adição.

Inversa  e é a inversa de . Note que se o conjunto fosse o dos naturais não haveria inversa pois ele não inclui números negativos. Então  e .

Agora vamos analisar o comportamento da multiplicação frente ao .

 associativa

 comutativa

 distributiva frente à adição

 então  é o elemento unitário da multiplicação. Logo a inversa será dada por , ou seja, . Note que sem a exclusão do zero teríamos problema com a inversa do elemento unitário da adição pois .

Então é um CAMPO frente à adição e multiplicação. Note a necessidade de ampliar os conjuntos para a obtenção de grupos e campos. Partindo dos naturais  e da operação  foi necessário incluir os números negativos para a existência da inversa, chegando ao conjunto .

Já para a operação multiplicação foi-se obrigado a inlcuir o conjunto dos racionais para admitir inversas . Além disso, para admitir operações como  com  e  percebe-se a necessidade de inclusão dos irracionais e dos imaginários, caso .

**Matrizes**

Uma matriz é uma tabela com  linhas e  colunas em que cada elemento é identificado pelos índices da linha e da coluna. Assim o elemento é encontrado no cruzamento da linha  com a coluna , ou seja, o primeiro índice se refere à linha e o segundo à coluna.

****

Note que quando denotamos uma matriz  temos um bloco com  números. Uma analogia é com um circuito integrado, composto de milhões de elementos individuais. Outra analogia seriam as rotinas dos softwares que podem ser utilizadas como blocos individuais. Se existe uma álgebra para lidar com os blocos sem muita necessidade de descer ao nível dos elementos individuais, isso representa uma enorme economia de esforço intelectual. Assim, se for possível simplificar todo um conjunto de operação com matrizes apenas no nível mais alto, mais abstrato, o trabalho se torna muito mais produtivo. Por isso a álgebra de matrizes é uma ferramenta matemática das mais poderosas.

**Exemplo: matriz Insumo-Produto**. Para produzir unidades do produto  é necessário usar  unidades dos insumos . Nesse exemplo podemos escrever a matriz na forma:

****

Vamos formalizar uma “ÁLGEBRA” de matrizes.

Dimensão: uma matriz de dimensão  [m por n] possui m linhas e n colunas. O elemento  está no encontro da iésima linha com a jésima coluna.

Matriz NULA: , ou seja, todos os elementos são nulos.

Matriz COLUNA:  tem apenas uma coluna e m linhas

Matriz LINHA:  tem apenas uma linha e n colunas.

Matriz QUADRADA: se , A é uma matriz quadrada de ordem m.

Função Delta de Kronecker: 

Matrizes quadradas especiais:

1. DIAGONAL: , já  pode tomar qualquer valor. Em termos da Delta de Kronecker pode ser escrita como:  onde  é o elemento da diagonal . A garante que todos os elementos fora da diagonal serão nulos.
2. IDENTIDADE: Matriz diagonal na qual , onde  denota a ordem da matriz quadrada. Ou seja, é uma matriz com todos os elementos da diagonal iguais a UM e todos os elementos fora da diagonal iguais a ZERO.
3. Matriz TRIANGULAR SUPERIOR: , ou seja, todos os elementos abaixo da diagonal são NULOS.
4. Matriz TRIANGULAR INFERIOR: , ou seja, todos os elementos acima da diagonal são NULOS.
5. Matriz SIMÉTRICA: 
6. Matriz ANTISIMÉTRICA: 

Note que matrizes representam um conjunto de números, logo é preciso definir as operações sobre esse conjunto.

Operação IGUALDADE:  se, e somente se, .

Os elementos da diagonal de uma matriz antisimétrica são nulos: .

Operação ADIÇÃO: essa operação sobre ser efetuada sobre matrizes de mesma dimensões,  e , e é definida como .

Operação SUBTRAÇÃO: é a inversa da ADIÇÃO. 

Propriedades da operação ADIÇÃO de matrizes:

1.  pois  ou seja é comutativa frente à adição.
2.  pois , ou seja, é distributiva.
3. , a matriz nula é o elemento unitário da operação adição de matrizes.

Operação multiplicação por um escalar: , ou seja, todos os elementos da matriz são multiplicados pelo escalar (número) .

Propriedades da operação multiplicação por escalar:

1.  distributiva
2. 
3.  é uma matriz nula
4. 

Operação **TRANSPOSTA** é denotada por , e é definida por . Ou seja, essa operação troca linhas por colunas. Gosto da notação  porque podemos usá-la facilmente em equações como  que teria que usar parênteses na notação , ou seja, . Além disso a aplicação da operação transposta duas vezes pode ser escrita como  e na outra como . Matriz simétrica tem a propriedade: . Note que nesse caso a matriz  é obrigatoriamente quadrada.

Propriedades da operação Transposta:

1. , pois  logo .
2. , pois .
3. 
4. Se  é simétrica então , pois 
5. Se  é antisimétrica então , pois 
6.  é simétrica. , logo  é simétrica.
7.  é antisimétrica. , logo  é antisimétrica.
8. Toda matriz quadrada pode ser decomposta em uma matriz simétrica e uma antisimétrica. Prova:

Prova:  logo onde  e 

Operação MULTIPLICAÇÃO de matrizes:

Motivação. Suponha uma matriz que fornece as quantidades de vitaminas A, B e C nos alimentos I e II, do tipo:



Quanto existe de cada vitamina em um prato com 5 unidades do alimento I e 2 do alimento II?

. Note que multiplicamos linha por coluna para obter a quantidade de cada uma das vitaminas em um prato combinando diferentes alimentos.

Só podemos, então, multiplicar duas matrizes  e  se o número de colunas de  for igual ao número de linhas de . A operação **MULTIPLICAÇÃO** entre uma matriz de ordem  e outra de ordem  é definida por , resultando em uma matriz de ordem . Note que o índice repetido da primeira matriz é o segundo, da coluna, e da segunda é o primeiro, o da linha. A regra para saber a dimensão da matriz multiplicação é cancelar a dimensão repetida, ou seja: , ou seja, o repetido desapareceu.

Propriedades da operação **MULTIPLICAÇÃO** de matrizes:

1. Em geral , ou seja, a operação multiplicação não comuta. Existem que casos em que a operação  está definida mas a operação não. Exemplo:  está definida pois o número  de colunas de é igual ao de linhas de , mas a operação não se . Para que as duas operações  e  sejam definidas é necessário que se  é  então é . Mesmo nesse caso os produtos  e  , sequer possuem a mesma dimensão., logo não podem ser iguais. Se  então as duas matrizes terão as mesmas dimensões, mas ainda assim os produtos  e , genericamente, são diferentes. Podem ser iguais apenas em certas condições especiais. Note a diferença entre os dois produtos:  e 

Propriedades da operação MULTIPLICAÇÃO.

1. Na álgebra de números reais sabemos que se , então , ou , ou ainda  e . No entanto no produto de matrizes é possível que  e  e . Veja o exemplo:  e  então:

.

1. Multiplicação pela matriz identidade: , ou seja, a matriz identidade é o elemento unitário frente à operação multiplicação de matrizes. Prova: , logo . Por outro lado , logo .
2.  é distributiva à esquerda.
3.  é distributiva à direita.

Prova:





1. , é associativa.



1.  e 
2. , na transposta do produto é preciso comutar a multiplicação.

Prova: 

1. Se  é uma matriz quadrada então  é simétrica. Prova:  logo  , logo  é simétrica.
2. A multiplicação de duas matrizes triangulares superiores é triangular superior.
3. A multiplicação de duas matrizes triangulares inferiores é triangular inferior.

Matriz triangular superior é tal que. Nesse caso, se  então:



Já se  então:



Logo trata-se de uma matriz triangular superior.

Matriz triangular inferior é tal que , nesse caso se  então:



Já se  então



Logo trata-se de uma matriz triangular inferior.

VETORES.

Vetores são matrizes linha ou coluna que denotamos por ou .

**Produto escalar ou produto interno.** Vamos multiplicar a matriz linha  pela matriz coluna. O resultado  se chama PRODUTO ESCALAR e é denotado por . Note que se  então  e chamamos a norma de  . A interpretação geométrica do produto escalar pode ser obtida, sem perda de generalidade, tomando o eixo na direção de  e colocando o vetor  no plano  fazendo um ângulo  com o eixo . Nesse caso podemos usar apenas duas dimensões e os vetores são dados por  e . O produto escalar será . Dois vetores não nulos para os quais  são perpendiculares entre si. Note que  é um número que varia entre  e .

**Desigualdade de Schwartz no produto escalar:**

 pois é o produto escalar de um vetor por ele mesmo. Mas . Aqui usamos as propriedades distibutiva  e comutativa  do produto escalar. Mas a equação  é uma parábola em  do tipo  com o coeficiente positivo, pois  e a desigualdade  só será válida se , ou sjea não existem raízes reais. Nesse caso,  que implica em  e .

Se  é um vetor complexo então precisamos não apenas transpor o vetor coluna mas conjugá-lo para garantir um número real positivo após a operação. Chamamos de adjunto do vetor  o vetor linha , ou seja, é necessário transpor e conjugar. Agora sim, o produto  será um número real positivo e pode ser usado na definição da norma, ou módulo, de um vetor complexo.

**Funções de Matrizes quadradas:**

A nossa álgebra de matrizes nos permiet apenas realizar as operações adição, multiplicação por um escalar e multiplicação de matrizes. A adição só pode ser realizada com matrizes de mesma dimensão e a multiplicação exige condições sobre as dimensão das duas matrizes. Se trabalharmos apenas com matrizes quadradas tanto as condições da adição quanto as da multiplicação serão automaticamente satisfeitas. Sabendo a operação multiplicação podemos definir a operação potenciação de matrizes: , sem problemas com matrizes quadradas.

Faz sentido falar de uma função de matrizes? Por exemplo: , ou ? Sabemos calcular essas funções para um argumento real apenas. No entanto sabemos calcular a função  e isso é o suficiente para definirmos uma função de matrizes desde que essa função possa ser expandida em série de Taylor-McLaurin, ou seja, seja de classe  e com raio de convergência infinito. Dentre essas funções estão a exponencial, o seno, o coseno, etc. Assim, considere a série de Taylor da função . Note que  são apenas escalares (números). Assim definimos a função de matrizes através da série:



Sabemos realizar essa operação? Sim, sabemos, pois sabemos calcular , sabemos multiplicá-la por um escalar , e sabemos somar as matrizes:

.

1. Se é uma matriz diagonal na forma:



Então.

Para tanto basta notar que , portanto  logo . Uma forma de mostrar que  é usando indução com a seguinte notação: . Daí mostramos que , e que . Supomos verdadeiro para , isto é, que  e mostramos que é verdadeiro para , ou seja . Assim está provado que  é sempre verdadeiro.

**Matrizes Periódica, idempotente e nihilpotente.**

Uma matriz quadrada  é **PERIÓDICA** com período , , se , onde  é a matriz multiplicada por si própria n vezes.

Uma matriz periódica com período 1, i.e., , é chamada **IDEMPOTENTE**.

Uma matriz quadrada é **NIHILPOTENTE** de índice se é o menor inteiro tal que .

1. Se  é periódica com período  então , .
2. Se  é idempotente então , .
3. Se  é nihilpotente de índice então , .

**Determinantes:**

Determinantes são uma função que associa um número real à matrizes quadradas de números reais na forma . A melhor forma de definir determinante é através dos tensores de Levi-Civita e por isso vamos começar com definições e estabelecer as propriedades desses tensores.

**Definições**.

A função sinal (sgn) é definida por .

O produtório é representado por 

Propriedade da função sinal:  ou, generalizando, . A operação produtório entra e sai do argumento da função sinal.

O Tensor de Levi-Civita é definido por: , e  quando houver apenas uma variável. Como então só pode assumnir os valores .

Esclarecendo a notação. Note que:



mantendo sempre . Não podemos usar  porque  e o produtório inteiro seria nulo.

O número de termos no produtório  é . Para ver isso começamos de:



Então devemos somar a PA .

Por definição se houver apenas um  então .

Já se existirem dois então .

Para  temos que  .

Para  temos:

.

Exemplos de cálculos de :



1. 
2. 
3. 
4. 

Note no caso 2 que se dois valores quaisquer são iguais o tensor se anula porque dois valores, o primeiro e o último, foram iguais (2).

Inversões: existe uma inversão sempre que  e . Cada inversão traz um sinal negativo. Se o conjunto  com  possui  inversões então . Logo será  se  for par e será  se  for ímpar. Foi a contando o número de inversões que calculamos



Tem 4 inversões. Não é necessário escrever todo o produtório para contar o número de inversões. Tome o exemplo da seqüência:



Tem um total de  inversões. As inversões do 2 foram o 1, o único número à direita menor do que 2. As inversões do 5 foram 4, 1 e 3, e do 4 foram 1 e 3. Com 6 inversões sabemos que . Contando as inversões podemos calcular o  rapidamente. Por exemplo: pois a seqüência tem  inversões. Já  pois a seqüência tem  inversões.

Arranjos de :

Percebemos então que só não é nulo se todos os forem diferentes. Escolhido um conjunto qualquer  de  diferentes entre si de quantas formas podemos ordenar esse conjunto? Trata-se do problema de colocar  objetos distintos em  caixas em que a ordem dos objetos importa. Assim existem:



formas de reordenar esse conjunto.

Exemplos:

1. , e .
2.  existem  mostradas abaixo:

Total 6 arranjos 

Propriedades do tensor de Levi-Civita:

1. . Corolário: se então .
2. .
3. Se , isto é,  então . Nesse caso  logo  e .
4. 
5. Se , isto é,  então . Note que nesse caso todos os termos  e , como existem  termos, então .
6. . Basta notar que .
7. . Aqui estamos supondo . Ou seja, a transposição de dois índices troca o sinal de .

Prova: como só vamos trocar  por basta analisar os termos contendo esses dois índices, pois todo restante não muda. No produtório vamos separar os termos de acordo com a ordem ,  , e . Os termos que contém apenas  e são:



Agora  portanto trocar por  nada muda nesse termo. Da mesma forma para o termo . Já no termo:



O sinal foi trocado duas vezes. Portanto, trocar trocar  por  leva a.

O único termo que sobrou foi , mostrando que qualquer permuta nos índices troca o sinal de .

1. Se  é obtido  através de  transposições então , pois cada transposição troca o sinal uma vez. Corolário: Se  é obtido através de  transposições de  então .
2. Reordenamento simultâneo: sejam ,  e  reordenamentos de , logo não existem índices iguais, i.e.  é sempre verdade. Então:

.

Para provar basta notar que





Pois  é um reordenamento de  e  é o mesmo reordenamento de  logo as permutações são idênticas em ambos os casos. Como  a igualdade está provada.

1.  onde  é um reordenamento de . Todos os termos com  e desaparecem do produtório.

Para provar as propriedades do determinante vamos precisar ainda dos teoremas de preenchimento.

**Teoremas de preenchimento:**

1. Sejam  todos os reordenamentos possíveis de , portanto  é sempre verdade, e  um reordenamento fixo de , então  varre todos os reordenamentos possíveis de .

Antes de demonstrar o teorema vamos exemplificá-lo com , e  e escolher . Agora vamos reordenar  e ver o que obtemos com :



Note que com  obtivemos de volta os 6 arranjos apenas em uma ordem diferente. Ou seja  é tão bom quanto  para varrer todas as possibilidades de arranjos.

Para  exaurir todas as possibilidades de reordenamento ele precisa de  conjuntos de  elementos, diferentes entre si [os conjuntos]. Se  contém  conjuntos diferentes, obrigatoriamente contém todos os possíveis reordenamentos de . Para cada  corresponde um , logo o número de conjuntos de  é igual ao de . Na realidade  é um reordenamento de . Como o número de conjuntos são iguais entre si e igual a  então basta provar que não existem  repetidos.

Vamos provar por absurdo:

Suponha que os dois conjuntos , diferentes entre si, levam a dois conjuntos  repetidos, i.e.:



Mas isso implica que  o que significa que , fazendo , e, portanto que  em contradição com a hipótese de que . Logo não há repetição nos conjuntos  e eles varrem todos os possíveis reordenamentos de .

1. Sejam  todos os reordenamentos possíveis de e  um reordenamento fixo de , então o reordenamento  tal que  também varre todos os reordenamentos possíveis de .

Antes de demonstrar o teorema vamos aplicá-lo para entender a regra de associação entre os diversos índices. Vamos escolher  e a regra para encontrar o é dada por . Então se , porque ,  porque  e  porque . Trata-se, portanto, de encontrar a função inversa .

No exemplo dado, ,  e , teremos:



Note que varreu todas as possibilidades de reordenamento de  também.

A prova é semelhante e basta provar que não há repetição, ou seja, se  então  logo .

com  obtivemos de volta os 6 arranjos apenas em uma ordem diferente. Ou seja  é tão bom quanto  para varrer todas as possibilidades de arranjos.

Para  exaurir todas as possibilidades de reordenamento ele precisa de  conjuntos de  elementos, diferentes entre si [os conjuntos]. Se  contém  conjuntos diferentes, obrigatoriamente contém todos os possíveis reordenamentos de . Para cada  corresponde um , logo o número de conjuntos de  é igual ao de . Na realidade  é um reordenamento de . Como o número de conjuntos são iguais entre si e igual a  então basta provar que não existem  repetidos.

Vamos provar por absurdo: Suponha que os dois conjuntos , diferentes entre si, levam a dois conjuntos  repetidos, i.e.:



Mas isso implica que  o que significa que , fazendo , e, portanto que  em contradição com a hipótese de que . Logo não há repetição nos conjuntos  e eles varrem todos os possíveis reordenamentos de .

**DEFINIÇÃO DE DETERMINANTE:**

O determinante é uma função que associa um número à matrizes quadradas, ou seja, é uma função de matrizes, o domínio é o conjunto de matrizes quadradas, e o contradomínio são os reais, definida pela regra:

.

Também denotado por:



Ou ainda na forma mais abreviada:

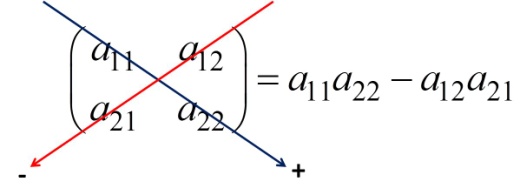
 com 

Note que a somatória é feita sobre o segundo índice dos elementos da matriz, que correspondem às colunas. Também se percebe que a propriedade (1) das  nos garante que podemos trabalhar apenas com reordenamentos de , evitando assim índices repetidos.

Exemplos: encontrar a forma explícita dos determinantes de matrizes ,  e .

1. .
2. , ou seja, .

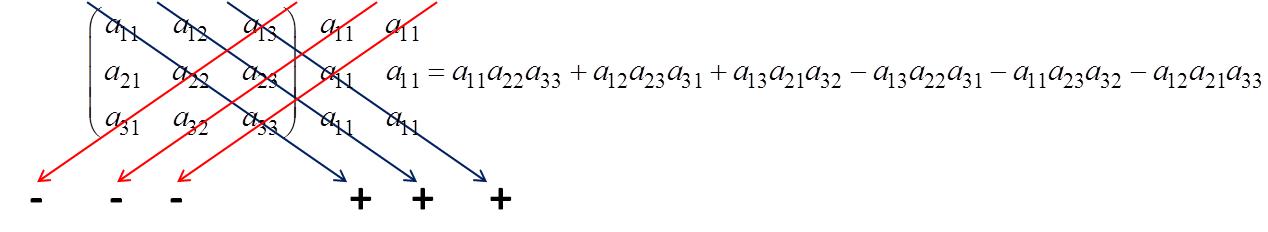
Trata-se da famosa regra:



1. 



Agora note que  e que  e mais ainda que varremos todos os reordenamentos possíveis [devem existir 2 começando com 1, dois começando com 2 e 2 começando com 3]. Trata-se também de outra regra famosa:



O determinante de uma matriz  terá  termos e o processo de cálculo vai se tornando tedioso. O EXCEL já tem uma função embutida que faz esse cálculo. Na mão o melhor é calcular usando a regra dos menores que provaremos adiante.

Propriedades dos determinantes:

1. 

Onde  é um reordenamento de . Note que a diferença com a definição inicial do determinante foi o reordenamento de .

Prova: por definição temos que:



Agora aplicamos dois reordenamentos iguais e simultâneos:



e usamos a propriedade (7):

.

Para completar, precisamos usar o teorema de preenchimento para garantir que os varrerão todos o reordenamentos possíveis de  como faziam os  iniciais. Isso garante que a somatória incluirá todos os termos.

1. . Note que agora a somatória é feita sobre o primeiro índice, ou seja, sobre as linhas.

Prova: novamente começamos de:



O procedimento de reordenação agora será o seguinte – reordenar cada  até chegar a um mesmo fixo, o que requer que . Se aplicamos o mesmo reordenamento para  obteremos , ou seja, se  virou  então  virou . Como os reordenamentos são, novamente, simultâneos, vale a propriedade (7) . A diferença agora é que os  estão fixos e os  variando nos reordenamentos de . O teorema 2 do preenchimento garante que essa variação preencherá todos os  reordenamentos. Assim a propriedade está provada.

1. .



Usando a propriedade (2). O determinante de uma matriz é igual ao da sua transposta.

1. Se  é obtida de  multiplicando a iésima linha por  então .

A transformação é dada por . Nesse caso 

4.a. 



1. Se  é obtida de  multiplicando a jésima coluna por  então .

Nesse caso notamos que  é obtida de  multiplicando a jésima linha por , e como  então .

1. Trocar duas linhas, ou duas colunas, de uma matriz troca o sinal do determinante. Para mostra a troca de colunas basta usar o fato de que .







Chamando  e 



1. Se uma matriz tem uma linha (ou uma coluna) nula então . Multiplica a linha por zero e usa propriedade (4).
2. Se dua linhas (ou colunas) de são iguais então . Se duas linhas  e são iguais, trocá-las não muda a matriz, i.e., . Por outro lado, pela propriedade (6) então .
3. E duas linhas (ou duas colunas) de são proporcionais então . Nesse caso  onde a matriz  possui duas linhas iguais, logo .
4. Considere duas matrizes  e  que só diferem na iésima linha, i.e.,  e , então  .



A mesma propriedade vale para duas colunas.

1. Somar à uma linha um múltiplo de outra linha não altera o determinante. Basta usar as propriedades acima:  mas  possui duas linhas proporcionais logo . O mesmo vale para colunas.
2. . Seja  então  e nnn

n

Agora desde que  seja um reordenamento de . Logo podemos incluí-lo na somatória acima obtendo:



1.  pois  e .
2. Se a matriz  é diagonal então .

Se  é diagonal então . Nesse caso o determinante é dado por:



Mas os deltas de Kronecker dentro da somatória garantem que que apenas os termos com sobrevivem, logo a somatória será , ou seja, a multiplicação dos elementos da diagonal.

1. Se a matriz  é triangular superior, ou inferior, então .

Trata-se de uma propriedade intuitiva porque exceto pela diagonal todos os outros termos serão multiplicados por algum elemento nulo do triângulo inferior. Basta mostrar para a triangular superior, pois a inferior sai com . Se  é matriz trinagular superiro então , o que impõe restrições nos .



Note que para . Se  então . O próximo termo é o , que pela propriedade da matriz deve ser menor do que 3, mas acima de 1, logo . Continuando o argumento percebemos que a única solução não nula é para  e .

Essa propriedade (15) é a base do método numérico de triangularização da matriz, usando o fato de que operações elementares não alteram o determinante, mais eficiente para cálculo de determinantes.

**Definição do COFATOR.**

Vamos obter a matriz  à partir da matriz extraindo a iésima linha e a jésima coluna. A matriz cofator de  é definida como: .

Exemplo, seja .





















Propriedades do cofator:

1.  , ou seja, iniciamos com uma matriz  e caímos em uma matriz . Note que os elementos da primeira linha podem ser escritos como , anulando todos os elementos com .



Expansão nos cofatores:





Portanto  com , com a

linha  substituida pro zeros exceto na coluna  em que é substituída por 1. Agora vamos trocando as linhas até levar a linha  para a primeira linha na ordem. Não podemos simplesmente trocar a linha  pela linha 1 porque isso desordena o resto da matriz. Vamos fazer o seguinte: primeiro trocamos a linha  com a linha , depois com a linha  e assim sucessivamente até chegar a primeira linha. Nesse processo trocamos de linhas  vezes, portanto:



Agora vamos trocando as colunas da mesma forma até levar a coluna  para a primeira coluna, então:



Ou seja



Pois extraimos a linha e a coluna .

Então, acabamos de provar que 

Nesse caso temos dois métodos de decomposição no cofatores para calcular um determinante – escolhe uma linha e usa a primeira somatória, ou escolhe uma coluna e usa a segunda. A idéia é procurar linhas ou colunas com muitos zeros para facilitar os cálculos. Para fazer determinantes  ou  na mão, dependendo da quantidade de zeros na matriz, esse método pode ser até rápido. Se precisar de uma resposta analítica em lugar de numérica também deve-se usar esse método. Para calcular valores numéricos de qualquer determinante não é o mais adequado. Entretanto, o método é valioso demais para provar o teorema a seguir:

Teoremas:

 ou 

Prova: vamos criar uma matriz  à partir da  trocando a linha  pela , i.e.,



Note que se  ficamos com duas linhas iguais. Agora  por conta das duas linhas iguais. Se escolhemos a linha para a expansão dos cofatores então . Se, por outro lado, , a troca não muda nada e . Nesse caso podemos então escrever que



Note agora que  onde matriz adjunta de , dada por , é a transposta da matriz cofator. Note o que temos aqui:

 ou 

Por outro lado também vale:

 ou 

Logo acabamos de encontrar a matriz inversa de  (): . A inversa é a transposta do cofator dividida pelo determinante de . Note que essa fórmula só pode ser utilizada se .

Assim podemos encontrar facilmente a matriz inversa de uma matriz  não singular:



Ou seja, para obter a matriz adjunta simplesmente trocamos os dois elementos da diagonal e os sinais dos dois elementos fora da diagonal. A matriz inversa é dada por:



**Formalização de Matriz Inversa**

1. Definição de matrizes SINGULAR e NÃO-SINGULAR. A matriz **A** é **SINGULAR** se , e é **NÃO SINGULAR** se .
   1. Divisores da matriz NULA: Se  então  ou  ou  e , as duas, são matrizes singulares. Claro que se  ou  então . Mas estamos interssados no caso em que ,  mas . Aplicando o determinante temos que . Pareceria então que exigir que  ou  seria suficiente, mas essa caso é mais forte, os dois devem ser nulos. Suponha que  e . Mas se  então  admite inversa, portanto  em contradição com .
2. Definição de matriz inversa. Se existir uma matriz  tal que e que  então  é a matriz inversa de , denotada por .
   1. Se a inversa existe ela é única. Supor que existem duas diferentes, ou seja, . Mas  ou seja  em contradição com. Logo a inversa, se existir, é única.
   2. Se  admite inversa então  é não singular. , logo  e . Mais ainda .
   3. Vale também o converso, se  é não singular então  admite inversa. Nesse caso  existe e .

Então podemos afirmar  admite inversa  é não singular.

* 1. Se  é singular,  não admite inversa, pois  logo  gera uma contradição.
  2.  é a inversa de . Pois .
  3. Se  é não singular,  também é não singular, pois .
  4. Se  e  são não singulares então  é não singular, admite inversa e  é a inversa de .



* 1. Se  é não singular então .

Partindo de  e aplicando a transposta  logo .

**OPERAÇÕES ELEMENTARES:**

São três as operações elementares sobre matrizes quadradas.

1. Multiplicar uma linha, ou uma coluna, por um escalar . O determinante é multiplicado por .
2. Permutar duas linhas, ou duas colunas. O determinante é multiplicado por .
3. Adicionar à uma linha, ou uma coluna, um múltiplo de outra linha, ou coluna. Nesse caso o determinante é preservado.

Vamos denotar um operador por  que aplicado em uma matriz  a modifica para a matriz , ou seja . Para diferenciar operações nas linhas das colunas vamos chamar o operador nas linhas de e o operador nas colunas de .

Teorema:  e .

O operador  só atua nas linhas, ou seja, apenas no primeiro índice do produto , portanto  que significa . Já o operador  só atua no índice e .

**Matrizes elementares.**

Uma matriz elementar é obtida aplicando operadores linha e/ou coluna sobre a matriz identidade. Denotamos essas matrizes por  e  ou  se a operação for apenas sobre linhas ou colunas.

Exemplo: A matriz  troca as linhas 1 e 2. Veja . A matriz  multiplica a linha 1 por . A matriz  soma à linha 1, linha 2. Note:



Já a matriz  soma á coluna 1, coluna 2, ou seja, opera nas colunas, em lugar das linhas.

Teorema.

1. , pois selecionamos as operações elementares com essa propriedade. Note que  e que  para a operação multiplicar uma linha por uma constante não nula,  para a operação trocar duas linhas e  para a operação adicionar á uma linha um múltiplo de outra linha.
2. Realizar uma operação sobre as linhas é equivalente à pré-multiplicar a matriz pela matriz elementar da operação desejada. Já realizar a operação sobre colunas é equivalente a pós-multiplicar pela matriz elementar.

 por outro lado 

1. Como o determinante das matrizes elementares não é nulo elas admitem inversa. A inversa de  também é uma matriz elementar. Se , ou seja também é obtida pela operação elementar reversa aplicada na matriz identidade.

**Matrizes equivalentes **

Definição: , é equivalente à , se  pode ser obtido de  através de uma cadeia de operações elementares.

Teoremas:

1.  , pois  e  é uma matriz elementar.
2. Se  então , pois se .
3. Se  e  então . Note que  e  logo  .
4. Todas as matrizes quadrada não singulares podem ser expressas como um produto de matrizes elementares.

Se  é não singular então  admite inversa. Isso significa que um conjunto de operações elementares leva  até , ou seja, , logo  . Isso também significa que .

**Método para achar matriz inversa através de operações elementares.**

Coloque as duas matrizes,  e  lado a lado. Agora, usando operações elementares de linhas vá transformando  na matriz identidade. Toda operação realizada sobre  também deve ser realizada sobre . Quando  se tornar a identidade a identidade se tornou .

Exemplo 1: achar inversa de . Usando a matriz adjunta sabemos que . Agora vamos usar apenas as operações elementares. Colocar as duas lado à lado:



Então .

Exemplo 2: achar inversa de . Faremos mais de uma operação elementar por vez.



Ou seja .

**Matrizes na forma escada reduzida por linha:**

Uma matriz na forma escada reduzida obedece aos seguintes critérios:

1. O primeiro elemento não nulo de uma linha é 1.
2. Se  é o primeiro elemento não nulo da linha  então  , ou seja, todos os elementos da coluna , exceto , são nulos.
3. Todas as linhas nulas estão abaixo das linhas não nulas.
4. Se as linhas são não nulas e  é o primeiro elemento não nulo da linha então .

Teorema: Toda matriz pode ser colocada na forma escada através de operações elementares.

A demonstração do teorema é a descrição do procedimento para atingir o objetivo – colocar a matriz na forma escada reduzida por linhas. O procedimento é o seguinte:

1. Suponha que já se colocou as  linhas com primeiro elemento não nulo iguais à 1 e todo o resto da coluna desse elemento nula. Tome agora a linha:
2. Se ela é nula nada precisa ser feito.
3. Se o primeiro elemento não nulo é o  divida a linha por . Assim tornamos o primeiro elemento não nulo igual a 1. Falta anular todos os elementos da coluna .
4. Some todos os elementos da linha  com a linha  multiplicada por . Assim anulamos todos os elementos da linha  exceto o .
5. Repita o procedimento para as próximas linhas. Note que os zeros abaixo e acima do elemento igual a 1 não desfazem os 1 e zeros já obtidos.
6. Permute as linhas até colocar a matriz na forma escada.

Exemplo: colocar a matriz  na forma escada reduzida por linhas.



**Unicidade da forma escada reduzida por linhas.**

Qualquer operação elementar de linhas em uma matriz na forma escada reduzida por linhas ou a tira da condição de escada ou nada modifica, deixando a matriz invariante.

1. Multiplicar uma linha por . Se a linha for nula nada muda. Se a linha não for nula contém o primeiro elemento não nulo igual a 1, que se torna igual a  após a operação e a matriz não está mais na forma escada.
2. Trocar duas linhas não nula altera a ordem escada .
3. Somar duas linhas não nulas colocaria 1 onde deveria ser zero

Isso significa que se  então . Matematicamente podemos provar a unicidade da forma usual, supondo que existe . Nesse caso então  e , logo  e  então  o que implica que . Cuidado para manter apenas operações de linhas, porque operações elementares de colunas podem gerar duas matrizes escadas. Exemplo:



Nesse caso trocamos as colunas 3 e 4 e as duas matrizes, embora diferentes, estão na forma escada.

**POSTO e NULIDADE de uma Matriz:** ao terminar de colocar a matriz na forma escada reduzida por linhas o número r de linhas não nulas será o posto [rank em inglês] da matriz M. Ou seja, posto de , , é o número de linhas não nulas de . A nulidade de  é , o número de colunas subtraído do posto. Note que no caso de um sistema de equações lineares o número de colunas é igual ao número de incógnitas.

Antes de utilizar o conceito poderoso de posto de uma matriz na resolução de sistema de equações lineares vamos estabelecer alguns teoremas.

Teoremas do posto de uma matriz .

1. Se  então . Claro, pois todas as linhas são nulas.
2. . Trivial pois  também é  e o número de linhas não nulas não pode ser maior do que o número de linhas.
3. . Aqui complica um pouco por estamos usando colunas em lugar de linhas. Isso implica que . Na forma escada  onde posto = número de linhas não nulas. Por outro lado é a coluna do iésimo elemento diferente de zero da linha . Logo  e . As condições da forma escada requerem que ,  e, continuando, . Então concluímos que , ou seja, .

**Definição equivalente de Posto.**

Posto de uma matriz  é o máximo  para o qual uma sub-matriz quadrada de  na forma  é não singular, ou seja, tem determinante não nulo. Fica claro a equivalência com a definição anterior para matrizes na forma escada. As operações elementares jamais anulam o determinante de uma matriz não singular, portanto podemos permutar as colunas da matriz na forma escada para colocar os 1´s em colunas adjacentes crescentes. Todas as linhas após  serão nulas, então o máximo determinante não nulo tem dimensão . Qualquer sub-matriz  terá linhas nulas com determinantes nulos. Procurar sub-matriz não singular pode ser feito diretamente na matriz  sem necessidade de reduzi-la à forma escada. O fato de que  sempre garante que as operações elementares sobre  jamais anularão qualquer determinante que já não fosse nulo. A vantagem dessa definição é que facilita a demonstração de teoremas. Do ponto de vista de operacionalidade pode ser muito fácil descobrir a sub-matriz não singular mas fica complicado operacionalizar o procedimento de sair procurando uma a uma as submatrizes. Melhor começar pelas matrizes de dimensão mais alta possível.

Exemplos:

Achar onde . Como  o posto será no máximo 3. Fica fácil de ver que a sub-matriz  marcada é triangular superior com determinante diferente de zero, logo .

Achar onde . Como a última linha é nula sabemos que o posto será no máximo 3. Esolhendo a sub-matriz obtemos uma sub-matriz identidade com determinante não nulo, logo .

Teoremas. Com essa definição fica fácil mostrar que:

1.  pois uma sub-matriz quadrada só pode ser, no máximo, de ordem .
2. . Sabemos que . Portanto se extraímos uma sub-matriz de  com determinante não nulo também podemos extrair a  da matriz . Se  tiver uma linha nula a terá uma correspondente coluna nula.
3. Se  é sub-matriz de  então .
4. , pois . Operações elementares, tanto nas linhas quanto nas colunas, não alteram o posto de uma matriz.
5. , constante.
6. .

Se e  são conformes para multiplicação então  e  e o produto . Note que as operações elementares de linha só se aplicam à matriz  do produto. Através de operações elementares podemos levar a matriz  para a forma escada com  linhas nulas. O produto então também terá, pelo menos,  linhas nulas. sobre colunas só se aplica à matriz . Isso implica que . Por outro lado , então .

1. O posto de uma matriz não muda se ele é pré/pós-multiplicada por uma matriz quadrada não singular.

Pré-multiplicação: . Como  é não singular então  e , logo , pela teorema 6. Por outro lado , que nos leva a  com a única solução possível . Basta transpor para concluir o mesmo para a pós-multiplicação .

Dois sistemas de equações lineares são equivalentes se eles possuem as mesmas soluções e as mesmas nulidades, ou variáveis livres.

1. . Note que é uma matriz simétrica quadrada.

Considere o sistema  e o sistema . Nesse caso . Isso pode ser re-escrito como . Mas  e  e  só será verdadeiro se . Logo  é a única solução para , ou seja,  e  são equivalentes. Igualando as nulidades  concluímos que .

**Sistema de Equações Lineares:**

1. Uma equação linear nas incógnitas  é escrito como: . Se  a equação é chamada de equação linear HOMOGÊNEA.
2. Um sistema de  equações lineares nas incógnitas  é escrito como:

 ou, na forma matricial: 

Se , ou seja, , ou ainda, o sistema é chamado de HOMOGÊNEO.

1. Equações redundantes. Suponha as seguintes equações: . A terceira equação foi obtida simplesmente somando as duas primeiras. Não contém qualquer informação extra. É uma equação redundante. Correta, mas desnecessária.
2. Solução. Qualquer conjunto  que satisfaça a todas equações do sistema é uma solução. Em termos das soluções os sistemas são classificados em CONSISTENTES ou INCONSISTENTES. Os sistemas inconsistentes não admitem qualquer solução, ou seja, o conjunto solução é vazio. Os sistemas consistentes admitem pelo menos uma solução.

Exemplo:  nos leva a , uma inconsistência. Não existe solução para esse sistema.

O sistemas consistentes podem ter uma única solução ou infinitas soluções.

Por exemplo, a equação dois do sistema  implica que  que substituída na equação um implica que  e o conjunto é a única solução do sistema. Por outro lado a equação  admite infinitas soluções. Escolhe um valor qualquer para  e .

**SOLUÇÃO TRIVIAL: um sistema homogêneo**

Um sistema homogêneo do tipo:



Admite pelo menos uma solução, a solução trivial . Todo sistema homogêneo é consistente.

No sistema:



Chamamos  de matriz dos coeficientes do sistema. Já  é o vetor das incógnitas  e . Chamamos de matriz ampliada a matriz:. O sistema pode então ser escrito na forma matricial como: .

Se o sistema for consistente então admite pelo menos uma solução. Vamos chamar  uma solução particular do sistema, então  é verdadeira. O sistema homogêneo associado  é sempre consistente, logo também admite pelo menos uma solução  tal que . Nesse caso então  também é uma solução de , pois . Se a única solução do sistema homogêneo for a trivial então  e .

Resolução de sistemas de equações lineares:

Vamos voltar ao sistema 

As soluções não mudam por qualquer operação elementar entre linhas realizadas de ambos os lados da igualdade. Considere agora a matriz dos coeficientes  e a matriz ampliada . Podemos então mostra os seguintes teoremas:

1. Se  o sistema é inconsistente e não admite qualquer solução.

Nesse caso ao reduzir o sistema à forma escada obeteríamos um sistema do tipo:  que gera a inconsistência .

1. Se  o sistema é consistente e admite apenas uma solução. Note que a nulidade desse sistema é zero. Se  é porque o que significa que as matrizes  e  reduzidas na forma escada tem que ser do tipo:

 e  o que levaria a algumas equações redundantes e a solução única .

1. Se  o sistema é consistente e admite infinitas soluções. Neste caso a nulidade é o número de variáveis livres que podem passar para o lado direito da equação. Sejam  as colunas dos primeiros termos não nulos de cada linha. Nesse caso sabemos que , , ...,  e que esses termos são os únicos não nulos nas colunas . Passamos para o lado direito as  incógnitas restantes para obter um sistema de equações do tipo:







Dados  os valores de são únicos, mas como os  podem assumir quaisquer valores existem infinitas soluções.

Suponha um sistema consistente com  variáveis, posto  e nulidade . Note então que o sistema possui  variáveis livres, independentes, e variáveis dependentes. Sempre podemos escolher as primeiras como as dependentes e as  últimas como independentes. Agora vamos reescrever o sistema



Exemplo: suponha que após a redução à forma escada o sistema ficou na forma:

 no qual a matriz ampliada é dada por . Vemos que estamos no caso em que  e a nulidade é . Logo existem duas variáveis livres. Nesse problema, seguindo a nossa notação, ,  e , assim escolhemos para ficarem do lado esquerdo das equações:



As duas variáveis livres são ,  está determinada mas podem assumir infinitos valores dependendo de .

1. O sitema homogêneo  com  incógnitas admite uma solução NÃO TRIVIAL se, e somente se, . Prova: se  então  pois o acréscimo de uma coluna de zeros não altera o posto da matriz, então o sistema admite apenas uma solução. Sabemos que a solução trivial  é uma solução, logo é a única solução. Se  então o sistema admite infinitas soluções. No caso do sistema acima teríamos:



1. Se o sistema homgêneo  com  possui solução NÃO TRIVIAL, então  é singular. Se o sistema admite solução não trivial então , o que significa que ao reduzir a matriz para a forma escada via operações elementares, que jamais anulam o determinante, terminaremos com uma ou mais linhas nulas. O determinante de uma matriz com linha nula é ZERO. Logo  e  é singular.
2. Se  então contém uma sub-matriz quadrada com determinante não nulo. Novamente podemos usar o fato de que as operações elementares, via linhas ou colunas, jamais anulam o determinante. Então podemos transformar a matriz original, via operações elementares de linhas e ou colunas na forma:



Nesse caso o determinante da sub-matriz  das  primeiras linhas e colunas é obviamente não nulo, vale 1, pois todos os elementos da diagonal valem 1. Além do resultado acima ainda podemos afirmar mais, que todos os determinantes de sub-matrizes  serão nulos pois terão pelo menos uma linha nula.

Um último ponto em relação às operações elementares é que qualquer matriz de posto  pode ser reduzida, através de operações elementares de linha e ou coluna, à forma:



Ou seja, a matriz identidade no canto superior esquerdo e matriz nulas nos outros 3 quadrantes. É fácil perceber como proceder para isso. Primeiro coloca-se a matriz na forma escada com operações elementares de linhas, depois com operações de colunas leva-se a matriz para a forma:



Agora utilzamos os 1´s da diagonal para anular via subtração de colunas todos os termos  da matriz  que sobrou.

Sistemas de equações lineares com incógnitas e equações. São sistemas que podem ser escritos na forma:

 com  sendo uma matriz . Se  é não singular, i.e.,  então  admite inversa e podemos calcular o vetor  da única solução imediatamente através de . Em particular se a equação é homogênea então só existe a solução trivial . Se  é singular significa que posto de  é menor do que e teremos soluções diferentes da trivial.

Regra de Cramer:

Note que para matrizes dos coeficientes não singular obtivemos . Por outro lado  e o vetor  np é tal que cada componente é dada por  de onde extraímos a regra de Cramer:



A regra é: troca-se a iésima coluna da matriz do numerador pelo vetor  e divide-se o detrminante dessa matriz pelo determinante da matriz dos coeficientes.

Exemplo:

 então  e  então  e  então  é a solução. Recalculando através da inversa:

 então .

Combinações lineares:

Equações paramétricas.

Suponha que exista uma curva no plano x-y, ou no espaço . A equação do LUGAR GEOMÉTRICO da curva é uma relação do tipo,  entre as variáveis x e y. Exemplo: círculo centrado na origem possui a relação , ou , onde é o raio do círculo. Vamos tentar extrair dessa relação o y em função de x. Mas note que  não é uma função  porque admite dois valores para cada x. Uma função é uma regra de associação entre todos os elementos de um conjunto chamado de domínio com elementos de outro conjunto chamado contra-domínio e não admite dúvida sobre a qual elemento do contra-domínio devemos associar cada elemento do domínio. Caso contrário seria impossível obedecer a ordem associe os elementos através da regra – o operador ficaria em dúvida sobre qual elemento associar.

A idéia da equação paramétrica [de parâmetro] é usar um parâmetro t em termos do qual as funções  e  existem sendo bem definidas. Podemos agora fazer um gráfico de vs  da seguinte forma: construímos uma coluna com os valores de , com ele calculamos  e  e no final fazemos o gráfico vs  esquecendo o . Criamos uma função . Para obter a relação do lugar geométrico é necessário eliminar o parâmetro. Vejamos o exemplo do círculo:

 e . Agora elevando as duas ao quadrado e somando obtemos , eliminando o parâmetro  e ficando com a equação do lugar gemétrico dos pontos .

Outro exemplo interessante é o da elipse:  e . Agora somamos a equação  com  para obter .

Com um parâmetro podemos descrever uma curva, com dois uma superfície, com três um volume e assim por diante. Note que se mantenho  fixo nas equações e  consigo gerar um círculo. Mas se ganhamos a liberdade de variar  de podemos preencher toda a área de um círculo, de um anel e até todo o plano x-y.

Equação paramétrica da reta.

Tome um vetor  e o multiplique por . Variando  de  podemos gerar todos os pontos ao longo da reta na direção do vetor . Note que estamos usando as equações paramétricas: , ou seja,  e . Eliminando o parâmetro obtemos  que é uma reta que passa no origem. Já a equação ,  e  é uma reta que passa no ponto  com a equação do lugar geométrico dada por: .

1. Mostre que se o sistema homogêneo de n equações e n incógnitas:

**A11 t1 + A12 t2 + ... + A1n tn = 0**

**A21 t1 + A22 t2 + ... + A2n tn = 0**

****

**A21 t1 + A22 t2 + ... + A2n tn = 0**

admite solução diferente da trivial, i.e,  então det(**A**) = 0.

1. Prove a regra de Cramer  para as soluções do sistema de n equações e n incógnitas:

**A11 t1 + A12 t2 + ... + A1n tn = B1**

**A21 t1 + A22 t2 + ... + A2n tn = B2**

****

**A21 t1 + A22 t2 + ... + A2n tn = Bn**

em que **A** é NÃO SINGULAR.

**Espaços Vetoriais**

Seja  o conjunto de todos os números reais positivos. Defina a operação adição  pelo produto usual de dois números, i.e., . Seja um escalar e defina a operação multiplicação por um escalar através da regra . Mostre que  é um espaço vetorial. Qual a necessidade da restrição para valores positivos?

Se  e  são espaços vetoriais mostre que  também é um espaço vetorial.

Considere o conjunto das matrizes com as operações adição e multiplicação por escalar matriciais usuais. Mostre que esse conjunto é um espaço vetorial. Quem é o elemento nulo?

Considere o conjunto das matrizes  e as operações matriciais usuais. Encontre uma base para esse espaço. Qual a dimensão desse espaço? O conjunto de matrizes  simétricas é um subespaço vetorial? Encontre uma base para esse espaço. Qual a dimensão desse sub-espaço?

Sitemas superdeterminados.

Tome o caso em que . Nesse caso temos mais equações do que incógnitas. Em termos matriciais temos que . Mesmo que o sistema seja inconsistente, de modo que  não admite solução, queremos achar os valores  para os quais de a soma dos desvios, i.e., se  então . A norma de um vetor é dada por . Então  logo  logo .

Agora note que  é um número, um escalar, logo,  então , logo a nossa equação é dada por:



Vamos escreve-la na forma mais adequada à diferenciação:

 onde .

A solução é dada quando o gradiente da função de  é nulo, ou seja:

.

Mas nesse caso temos que:



Agora  é simétrica, logo:



Então note que  implica na equação  que pode ser escrita na forma matricial como . Então a  embora não seja uma solução de  minimiza o desvio . Se  então  é uma solução de .

Regressão linear:

**Problema de autovalores e autovetores:**

O problema de diagonalização de matrizes é resolvido através do problema de autovalor. Problema do auto-valor de uma matriz M quadrada: queremos saber se existem autovetores  e autovalores  tais que .

A forma canônica com que esse problema é resolvido é escrever a equação na forma do sistema de equações lineares  que só admite solução diferente da trivial  se . Note que isso leva a uma equação de grau  pois  e não é possível se afirmar à priori, mesmo se M for uma matriz real, que as raízes, correspondentes aos autovalores, serão reais ou complexas.

Entretanto se M for real e simétrica podemos afirmar com certeza que os autovalores serão reais. Poderíamos relaxar afirmando que se M for Hermitiana os autovalores são reais.

**Matrizes Hermitianas**

Uma matriz é Hermitiana se , ou seja, . Se  é real e Hermitiana então é simplesmente simétrica, . Ou seja, matrizes reais simétricas são Hermitianas – um sub-conjunto das matrizes Hermitianas. Qual a propriedade interessante das matrizes Hermitianas?

1. Os autovalores são reais
2. Os autovetores são ortogonais

Prova: Temos que  e . Aplicando o operador adjunto na segunda equação  como  então . Agora multiplicamos a primeira equação por  obtendo  e a última por  obtendo . Subtraindo uma da outra temos que . Se então  e a igualdade só é satisfeita se , o que significa que é real. Por outro lado se , [caso não degenerado] é preciso que , o que significa que os autovetores são ortogonais entre si. Se  é real e simétrica os autovalores e autovetores serão reais.

Agora, se além de real e simétrica for definida positiva então os autovalores, além de reais, são obrigatoriamente positivos, pois  e como  sempre, então .

Existe uma arbitrariedade na escolha do autovetor uma vez que é possível multiplicar a equação  por uma constante de ambos os lados sem perda de validade. Já que se pode multiplicar por uma constante qualquer pode-se multiplicar pela constante que garanta que  e . Neste caso geramos uma base ortonormal – ortogonal normalizada à 1. Todos os autovetores são unitários, i.e., possuem norma igual a 1.

**Diagonalização de Matrizes:**

Vamos considerar que encontramos todos os autovalores da base ortonormal de autovetores de modo que  e . O que acontece se realizamos a seguinte operação:

. Note que nossa notação para o símbolo de vetor é de uma matriz coluna logo  e que  e  são matrizes . Na primeira os vetores estão alinhados na forma de linhas e na segunda na forma de colunas. Além disso note que . Aplicando a cada um dos autovetores normalizados teremos:

 e, finalmente, que . Agora usamos o fato de que os vetores são ortonormais para chegar ao resultado . Ou seja a matriz foi diagonalizada. A matriz que a diagonaliza é  onde o primeiro índice se refere ao autovetor e o segundo às suas componentes. Note que  e que , ou seja, . São chamadas matrizes ortogonais. Aplicando o determinante , e usando o fato de que ,  e  vemos que  que nos leva a . Na realidade , sendo 1 em rotações e -1 em operações que envolvem reflexões, que não é o caso aqui.

Então a operação transforma a matriz em uma matriz diagonal. Para voltar da diagonal à  basta inverter S´com S: .

**Transformação de similaridade:**

Quando transformamos uma matriz segundo a forma:  dizemos que fizemos uma transformação de similaridade. A transformação de similaridade preserva o determinante e o traço da matriz. A preservação do determinantes é demonstrada facilmente pois . Já o traço é dado pela soma dos elementos da diagonal  e tem as seguinte propriedades: ,  e . As duas primeiras são triviais. A última é demonstrada da seguinte forma:  e . Com isso a preservação do traço pode ser facilmente demonstrada . Se a matriz M foi diagonalizada para  e o determinante e o traço são preservados então  e o .

**Diagonalização da Matriz inversa:**

Podemos mostrar que a mesma matriz S que diagonaliza a matriz M também diagonaliza sua inversa. Sabemos que e . Inserindo  dos dois lados de M: , e usando o fato de que M se torna diagonal obtemos . Agora multiplicamos à direita e à esquerda pela inversa de S ou S´ para obter , que se transforma em , o que significa que . Entretanto se  então  e também é diagonal. Ou seja, a transformação S também diagonaliza a matriz inversa e, além disso, os autovalores da matriz inversa são os recíprocos da direta.

Em resumo se  é um autovalor de M com autovetor  então  é o autovalor de M-1 correspondendo ao meso autovetor .



